



ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ВИКЛАДАЧІВ І АСПІРАНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МЕНЕДЖМЕНТУ ТА МАРКЕТИНГУ

До 10-річчя факультету менеджменту та маркетингу



Список літератури

- Брудніс Є. В., Новацький В. В. Необхідність та шляхи впровадження екологічно-го страхування в Україні. – Інформаційна державна податкова служба України. – 2000. – 3 (9). – С. 60–67.
- Гантмахер Ф. Р. Теория игр. М.: Наука, 1967. – 315 с.
- Сирецький В. Методи оптимізації в теорії дискретних лінійних систем управління. М.: Наука, 1982. – 296 с.
- Оптимізаційне управління. Под ред. В. Ф. Кротова. – М.: Высш. шк., 1990. – 430 с.



2002

В. В. Новицький, Є. В. Бридун

МЕТОД ОБЕРНЕННЯ МАТРИЦІ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

Багатопродуктова статична модель Леонтьєва у матричному вигляді записується так:

$$X = AX + C,$$

де X – n -вимірний вектор обсягів виробництва; A – матриця прямих витрат порядку n ; C – n -вимірний вектор невикористаного споживання. Розв'язок цієї системи щодо вектора X має вигляд:

$$X = (I - A)^{-1} C.$$

Тут і далі I – одинична матриця порядку n ; $(I - A)^{-1}$ – матриця повних витрат.

Визначивши матрицю прямих, а згодом і повних витрат, можна, зокрема, показати негативний вплив екологічних збитків на обсяги виробництва [1].

Розрахунок оберненої матриці $(I - A)^{-1}$ у випадку, коли A має менше за одиницю найбільше власне значення (тобто є продуктивною), можна провести, зокрема, ітеративним методом за допомогою такого нескінченного матричного ряду

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots \quad (1)$$

або іншими відомими методами [2].

Знайдемо вираз для цієї ж матриці у випадку, коли відомі коефіцієнти мінімального багаточлена [2] для матриці A

$$m(\lambda I - A) = \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad p \leq n,$$

де p – степінь мінімального багаточлена; a_i – його коефіцієнти.

Поділимо цей багаточлен на двочлен $(1 - \lambda)$. Після відповідних перетворень матимемо

$$\frac{m(\lambda I - A)}{(1 - \lambda)} = - \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} \lambda^{p-k} + (1 - \lambda)^{-1} \sum_{i=0}^p a_{p-i}.$$

Оскільки матриця A задовольняє свій мінімальний багаточлен, то з останнього виразу випливає, що

$$(I - A)^{-1} \sum_{i=0}^p a_{p-i} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} A^{p-k}$$

або остаточно

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} \right) A^{p-k} / \sum_{i=0}^p a_{p-i}.$$

Легко показати, що сума у знаменнику правої частини перетворюється на нуль тоді та тільки тоді, коли матриця A має хоча б одне одиничне власне значення, тобто коли $I - A$ є особливою матрицею і початкова задача не має сенсу.

Позначимо

$$\alpha_{p-k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} / \sum_{i=0}^p a_{p-i}, \quad (2)$$

тоді вираз для матриці повних витрат буде таким:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^p \alpha_{p-k} A^{p-k} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1}. \quad (3)$$

Для матриці $(sI - A)$, де s – деякий параметр, матимемо

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1} (I - A s^{-1})^{-1} = s^{-1} \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} s^{p-i} \right) A^{p-k} s^{k-p} \times \\ \times \left/ \sum_{i=0}^p a_{p-i} s^{p-i} \right. = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} s^{k-(i+1)} \right) A^{p-k} / \sum_{i=0}^p a_{p-i} s^{p-i}.$$

Позначимо

$$\alpha_{p-k}(s) = \sum_{i=0}^{k-1} a_{p-i} s^{k-(i+1)} / \sum_{i=0}^p a_{p-i} s^{p-i},$$

тоді

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^p \alpha_{p-k}(s) A^{p-k} = \alpha_0(s) I + \alpha_1(s) A + \dots + \alpha_{p-1}(s) A^{p-1},$$

тобто маємо вираз для цієї оберненої матриці у вигляді розкладу за степенями матриці A .

Якщо у матриці A мінімальний багаточлен збігається з характеристичним багаточленом, тобто $p = n$ та $m(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)$, то у попередніх формулах слід замінити p на n .

Остання формула з точністю до позначень збігається з отриманою в [3] формулою такого вигляду:

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{p-1} s^j \sum_{i=1+j}^p a_i A^{i-1-j} / \sum_{i=0}^p a_i s^i.$$

Вона, на відміну від попередньої, подає матрицю $(sI - A)^{-1}$ через розклад за степенями s

$$(sI - A)^{-1} = \frac{B_{p-1}s^{p-1} + \dots + B_1s}{s^p + a_{p-1}s^{p-1} + \dots + a_1s + a_0},$$

де матричні коефіцієнти B_j мають вигляд

$$B_j = \sum_{i=1+j}^p a_i A^{i-j-1}.$$

З рівнянь (2) та (3) випливає алгоритм розрахунку матриці повних витрат, який має вигляд

$$(I - A)^{-1} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1}.$$

Тут $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ — назвемо мультиплікаторами прямих витрат, які визначаються через коефіцієнти мінімального багаточлена за допомогою таких рекурентних співвідношень

$$\alpha_{p-1} = 1 - \frac{\alpha_{p-1}}{\sum a_{p-1}} - \dots - \frac{\alpha_0}{\sum a_{p-1}} = \alpha_{p-2} - \frac{a_{p-1}}{\sum a_{p-1}}. \quad (4)$$

Отже, матриця повних витрат може бути розрахована через мультиплікатори та степені матриці прямих витрат ще таким чином:

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &= \left(1 - \frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right) \times I + \left(1 - \frac{a_1}{\sum a_{p-1}} - \frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right) \times A + \\ &+ \dots + \left(1 - \frac{a_{p-1}}{\sum a_{p-1}} - \dots - \frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right) \times A^{p-1} = I + A + \\ &+ \dots + A^{p-1} - \frac{a_0}{\sum a_{p-1}} (I + A + \dots + A^{p-1}) - \\ &- \frac{a_1}{\sum a_{p-1}} (A + \dots + A^{p-1}) - \dots - \frac{a_{p-1}}{\sum a_{p-1}} (A^{p-1}). \end{aligned}$$

Перевага пропонованого методу обчислення матриці повних витрат порівняно з ітеративним методом (1), зокрема, полягає в обчисленні не більше ніж $p-1$ степенів матриці A та досягненні при цьому вищої точності.

Наведемо приклад обчислення матриці повних витрат через мультиплікатори та матрицю прямих витрат порядку 3 (трипродуктова економіка),

порівняння з ітеративним методом. Розрахунки проведено за допомогою пакета аналітичних обчислень *Maple 5.0*. Скористаємося наведеним у [4] виразом для матриці прямих витрат

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,09 & 0,08 \\ 0,08 & 0,24 & 0 \\ 0,07 & 0,06 & 0 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо коефіцієнти характеристичного багаточлена матриці A . Вони будуть такими: $a_0 = 0,00096$; $a_1 = 0,0592$; $a_2 = -0,54$; $a_3 = 1$, а їх сума $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,52016$.

Підставляючи відповідні значення в (2), знаходимо коефіцієнти α :

$$\alpha_0 = 1 - \frac{a_0}{\sum a} = 1 - \frac{0,00096}{0,52016} = 0,99815;$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{a_1}{\sum a} = 0,99815 - \frac{0,0592}{0,52016} = 0,88434;$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{a_2}{\sum a} = 0,88434 - \frac{-0,54}{0,52016} = 1,92249.$$

Знаючи коефіцієнти α , можна визначити з (3) обернену матрицю

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &= 0,99815 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0,88434 \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,09 & 0,08 \\ 0,08 & 0,24 & 0 \\ 0,07 & 0,06 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ 1,92249 \times \begin{pmatrix} 0,1028 & 0,0534 & 0,024 \\ 0,0432 & 0,0648 & 0,0064 \\ 0,0258 & 0,0207 & 0,0056 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,46109 & 0,18225 & 0,11689 \\ 0,15380 & 1,33497 & 0,12304 \\ 0,11150 & 0,09286 & 1,000892 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Це значення оберненої матриці повністю збігається з точно обчисленим аналітично.

Розраховуючи значення елементів оберненої матриці ітеративним методом (1) піднесемо матрицю A , наприклад, до шостого степеня, тоді

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,459967071 & 0,1814065332 & 0,1166476690 \\ 0,1531406912 & 1,334467754 & 0,1216434074 \\ 0,1111899659 & 0,09261758299 & 1,0008853429 \end{pmatrix}$$

Значення елементів цієї матриці вказують на повільну збіжність ітеративного методу у нашому випадку.